
Une police mathématique pour la Société mathématique de France : le *SMF Baskerville*

Yannis Haralambous

Atelier Fluxus Virus, 187 rue Nationale, F-59800 Lille,
yannis@fluxus-virus.com

1. Une nouvelle police mathématique, est-ce bien utile ?

Tout d'abord qu'entend-on par *police mathématique* ? Le concept de « police mathématique » est à ce point naturel pour le \TeX iste, que cette question semble superflue, voire stupide. Le fait que \TeX a été développé par un mathématicien pour servir à composer ses propres livres, y est certainement pour quelque chose. Du point de vue du non- \TeX iste, la situation est bien différente : ses choix se résument le plus souvent à la police Symbol (qui reprend les caractères grecs de la police Times de texte grec courant) et à la collection Adobe Mathematical Pi (n^{os} 1 à 6). Cette dernière a certes un plus grand nombre de caractères, mais ceux-ci manquent d'unité et de cohérence pour donner un résultat typographique global de qualité. \TeX , par contre, propose un très grand nombre de caractères et symboles mathématiques, dessinés de manière à former un tout uniforme : ceci vaut aussi bien pour les symboles mathématiques que pour les lettres grecques (spécialement dessinées pour être utilisées dans un contexte mathématique) et les lettres latines utilisées dans les formules (il est bien connu que l'italique mathématique de \TeX , appelé *cmmi* dans les cercles d'initiés, est différent de l'italique de texte, aussi bien en ce qui concerne les formes des caractères, que les chasses, et le crenage).

En suivant donc l'exemple de Donald Knuth, on qualifiera de « police mathématique » toute famille de polices de caractères qui propose un ensemble complet de symboles mathématiques, lettres grecques et latines, adaptés à la composition des mathématiques, uniforme et cohérent. Il va de soi qu'une telle police mathématique est associée à un caractère typographique donné : la police mathématique de Knuth correspond au caractère Computer Modern, dérivé du Monotype Modern 8A.

On sait qu'il existe des milliers de polices de texte ; de combien de polices mathématiques dispose-t-on ? À la connaissance de l'auteur, que de quatre : le Computer Modern original de Knuth, le Concrete Mathematics (également de Knuth, mais très peu utilisé, sans doute à cause de sa modernité), le *MathTime* (qui correspond au caractère Times : cette police a été développée par Michael Spivak et est aujourd'hui maintenue et diffusée par Y&Y) et le Lucida Math (qui correspond au caractère Lucida, à l'origine orienté écran ou fax). À ces quatre polices vient de s'ajouter la police *SMF Baskerville* qui fait l'objet de cet article.

À noter que d'autres tentatives de présentation différente des mathématiques ont eu lieu. Mais il s'agissait toujours de combiner des symboles mathématiques et lettres grecques existants avec des polices de texte différentes. Ces tentatives sont souvent des bons compromis pour des projets précis ; nous verrons dans la suite pourquoi la police *SMF Baskerville* est radicalement différente et n'aurait pu être obtenue par la combinaison, aussi habile soit elle, d'éléments existants.

Comme son nom l'indique, le *SMF Baskerville* a été développé pour la SMF (Société Mathématique de France), qui utilise $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ pour toutes ses publications depuis un bon moment. Elle est basée sur la typographie d'une des plus prestigieuses revues mathématiques : *Les Publications mathématiques de l'I.H.E.S.*, imprimée, même aujourd'hui, au plomb, par l'Imprimerie des Presses Universitaires de France, à Vendôme.

Cette revue utilise le Baskerville pour le texte courant et les lettres latines dans un contexte mathématique, et le Didot grec pour les caractères grecs. La typographie des mathématiques diffère sensiblement de celle de Knuth : les chiffres de taille normale sont tous à l'ancienne (par contre, les chiffres utilisés dans les exposants et indices, sont des chiffres normaux) ; les lettres latines minuscules sont bien italiques, mais les majuscules sont droites ; les lettres grecques sont droites également — elles sont tirées du caractère Didot grec, traditionnellement utilisé pour le texte grec (ancien ou moderne). Les intégrales sont moins penchées que celles de Knuth, les grands opérateurs alphabétiques¹ (somme, produit) plus petits que ceux de Knuth, etc.

On peut bien sûr se poser la question : jusqu'où faut-il aller, quand on s'apprête à modéliser par $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ un système typographique traditionnel ? Nous avons choisi de ne suivre que les grandes lignes : nous avons adapté ou dessiné des caractères très proches de l'original et nous avons adapté $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ à ces caractères, pour obtenir un résultat optimal. Au lecteur de juger si le résultat reflète le modèle original et si les choix effectués ont été les plus judicieux.

1. « Alphabétiques » par opposition aux opérateurs « géométriques », c'est-à-dire dont la forme est purement géométrique, comme \otimes , \sqcup , etc.

Au § 4 nous comparons le résultat obtenu avec la typographie originale des PUF. Au § 5 nous présentons un détail du système typographique des PUF qui nous a intrigué, et que nous avons choisi de ne pas suivre, ne serait-ce que par manque d'informations...

Finalement, nous avons décidé de donner également aux utilisateurs qui le désirent la possibilité d'utiliser le *SMF Baskerville* de manière plus proche aux conventions de Knuth : des caractères grecs penchés ont été spécialement dessinés, et les lettres latines majuscules italiques Baskerville adaptées. Ainsi on peut, *via* une option de paquet \LaTeX passer de « lettres grecques/latines majuscules droites » à « lettres grecques minuscules penchées/latines majuscules italiques ».

2. Le caractère Baskerville

John Baskerville (1707-1775) n'est devenu imprimeur et graveur de caractères que passé l'âge de 45 ans. À part le caractère qui porte son nom, il a aussi contribué à faire évoluer la presse typographique, et a même inventé un nouveau type d'encre, ainsi qu'un nouveau processus de fabrication de papier. Le premier livre sortit de ses presses en 1757. En 1764, Pierre Simon Fournier, affirmait dans son *Manuel Typographique* que les italiques de Baskerville étaient les meilleures de toutes les presses britanniques, mais que son romain chassait un peu trop. Un jeune italien, du nom de Giambattista Bodoni, fût tellement impressionné par le travail de Baskerville qu'il quitta son travail à l'imprimerie du Vatican pour le rejoindre en Angleterre. Mais alors que Baskerville avait déjà acquis une solide réputation internationale, les autres imprimeurs anglais ne l'estimaient guère.

Le perfectionnisme de Baskerville l'obligeait à demander des prix deux à trois fois supérieurs à ceux des autres imprimeurs, chose que les clients n'appréciaient pas du tout. En 1762, il écrivait à Franklin, aux États-Unis : « si mes seules ressources venaient de l'imprimerie et de la fonte de caractères, je serais mort affamé depuis longtemps ». Il mourut en 1774. Quatre ans après sa mort, Beaumarchais (auteur du *Mariage de Figaro*), acheta tout son matériel pour imprimer les Œuvres complètes de Voltaire : c'est ainsi que la tradition de Baskerville traversa la Manche et s'installa définitivement en France.

Les matrices originales de Baskerville changèrent plusieurs fois de propriétaire pour finir par être acquises par l'imprimerie Bertrand, à Paris, en 1893. Mais c'est encore l'Angleterre qui fût témoin de la redécouverte du caractère Baskerville : en 1919, Bruce Rogers, conseilla aux Harvard University Press

d'acheter des poinçons fondus à partir des matrices originales et de les utiliser pour leurs prestigieuses éditions.

Ensuite ce fut un effet de boule de neige : Monotype grava un Baskerville en 1923, Stempel en 1926 et Linotype en 1931. Finalement, en 1953, dans un formidable élan de générosité, Charles Peignot, représentant Deberny & Peignot, les derniers propriétaires des matrices originales, en fit don aux Cambridge University Press, qui les détiennent encore aujourd'hui. Nous renvoyons le lecteur désireux de plus amples informations sur Baskerville aux ouvrages [3] et [5].

Il est intéressant de noter que ce va-et-vient incessant du Baskerville entre la France et l'Angleterre continue encore aujourd'hui, pour le Baskerville numérique : c'est bien la Société Mathématique Française (et non pas son homologue britannique !) qui a décidé d'adopter ce caractère, en suivant l'exemple des Presses Universitaires de France...

Autre avantage du Baskerville : contrairement au Computer Modern, il existe des versions cyrilliques et grecques du caractère Baskerville : le Baskerville cyrillique est diffusé par Paratype et peut être acheté sur leur site Web [2] ; le Baskerville grec a été dessiné (entre autres) par Linotype et peut également être acheté sur leur site Web [1] :

Lest de l'âme, pesant bagage,
Trésors misérables et chers...
Μυчительны и бесполезны,
Вы были счастьем бытия...
Τῆς ψυχῆς ἀπόβαρα, φορτία βαριά,
Ἄθλιοι κι ἀκριβοὶ θησαυροί...

Le paquet `smfbask` contient déjà les métriques et polices virtuelles *ad hoc*².

3. Le *SMF Baskerville*

Il s'agit d'un paquet \LaTeX (appelé `smfbask`), qui consiste en une feuille de style \LaTeX , un certain nombre de fichiers FD (*font descriptor*), un certain nombre de polices PostScript (fichiers TFM, VF, PFB) et le fichier de configuration

2. Si le lecteur décide d'acheter la police Baskerville grecque chez Linotype, qu'il prenne bien garde de commander la version polytonique, *même* s'il n'envisage de l'utiliser que pour composer du grec moderne monotonique. En effet, Linotype a fait la regrettable erreur de dessiner l'accent des polices monotoniques sous forme de triangle, au lieu d'accent aigu. Tant que cette erreur n'est pas corrigée, seules les polices Linotype grecques polytoniques contiennent des lettres dûment accentuées.

de dvips *ad hoc*. La seule option de paquet \LaTeX disponible est `itcaps` : elle permet d'obtenir des majuscules latines italiques, et des lettres grecques minuscules penchées. Le paquet `smfbask` présuppose que l'utilisateur possède certaines polices de la typothèque Adobe : les familles ITC Baskerville et ITC Baskerville Expert, ainsi que les polices Mathematical Pi 2 et 6. S'il a des textes russes ou grecs à composer, il devra en outre posséder les familles de polices ITC New Baskerville Roman Cyrillic (1990-1994, ParaGraph International) et Baskerville GreekP (1993, Adobe Systems). Pour permettre à l'utilisateur de prévisualiser son texte, sans acquérir toutes ces polices PostScript, l'autorisation sera demandée d'inclure dans le paquet `smfbask` des versions bitmap en basse résolution (300 ppp) de ces polices.

3.1. Les lettres latines

Les lettres latines symboles mathématiques sont légèrement plus larges que les lettres latines de texte. Il se passe que dans la police Adobe Baskerville italique, les descendantes des lettres f et j sont très basses et dépassent en profondeur les délimiteurs (parenthèses, crochets, etc.). Pour y remédier, nous avons modifié et les descendantes, et les délimiteurs. Une police PostScript n'a normalement pas de mutabilité (*metaness*), dans le sens qu'elle ne varie pas suivant le corps utilisé. Dans ce cas, néanmoins, nous avons appliqué une légère variation aux corps utilisés pour les indices/exposants : les lettres sont légèrement plus larges, et, surtout, chassent plus. Ainsi ces lettres étroites (par définition-même du Baskerville), sont plus lisibles en petits corps (voir également § 5 en ce qui concerne les petits corps de la typographie originale des PUF).

Un symbole qu'il a fallu dessiner spécialement est le « del » ∂ (différentielle partielle). En effet, souvent il suffit de prendre la lettre eth italique de la police et de lui enlever la barre horizontale. Ici, cette approche ne donne pas de résultat satisfaisant et il a fallu dessiner le caractère.

3.2. Les lettres grecques droites

Il s'agit d'un caractère grec Didot traditionnel, adapté en ce qui concerne la taille et les épaisseurs des pleins et déliés au Baskerville mathématique. On avait ici un problème fondamental à résoudre, qui affecte les lettres grecques avec ascendante (bêta, delta, zêta, thêta, lambda, xi, phi, psi). Le rapport entre la hauteur des majuscules (ou minuscules avec ascendantes) et des minuscules (sans ascendante) est différent de celui de l'alphabet latin en général et du Baskerville en particulier. Dans la figure 2 on voit à gauche le caractère grec

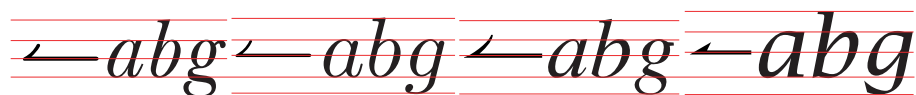
αβγδεζηθικλμνξπρ
 στυφχψωεθωρςφ
 αβγδεζηθικλμνξπρ
 στυφχψωεθωρςφ

FIG. 1: Les lettres grecques droites et obliques du *SMF Baskerville*

ΓΣαβγσΑΒαbγςΑΒΓΣαβγσ

SMF Baskerville	Monotype Greek 90
-----------------	-------------------

FIG. 2: Comparaison entre la taille des bas-de-casse grecques du *SMF Baskerville* et du caractère grec Didot traditionnel



SMF Baskerville Computer Modern MathTimes Lucida New Math

FIG. 3: Comparaison entre les différentes hauteurs et profondeurs de polices mathématiques

et latin italique du *SMF Baskerville* et à droite le caractère Didot traditionnel (dans sa meilleure incarnation : le Monotype Greek 90). Comme le lecteur peut le constater quelques aspects caractéristiques du Didot grec traditionnel ont été sacrifiés au profit d'une meilleure homogénéité. L'approche des PUF est radicalement différente : les PUF ont choisi d'utiliser un caractère grec de texte, *de même corps* que le texte latin environnant. On obtient donc des majuscules grecques de même taille que les majuscules latines, mais des minuscules grecques sensiblement plus petites que leurs homologues latines.

3.3. Les lettres grecques obliques

Ces symboles ont été dessinés pour permettre à l'utilisateur de choisir entre une typographie « anglosaxonne » (avec lettres grecques obliques) ou « à la PUF » (avec lettres grecques droites). Il est à noter que les lettres grecques « obliques » appartiennent à un caractère typographique historiquement différent des lettres grecques « droites » : en effet, les premières s'inspirent du caractère britannique *Porson*, dessiné par Richard Porson en 1806, alors que les secondes s'inspirent du caractère dessiné par Ambroise Firmin-Didot, fils de Firmin Didot, vers le milieu du XIX^e siècle.

Encore une fois il a fallu adapter le caractère originellement destiné au texte grec, aux mathématiques en général, et au Baskerville mathématique en particulier.

3.4. Les symboles mathématiques « géométriques »

On entend par cela, les symboles dessinés à l'aide de traits droits, cercles, etc. sans empattements et sans traits épais et déliés : $+$, \oplus , \forall sont géométriques, \prod et ∇ ne le sont pas.

Nous nous sommes basés sur les caractères géométriques dessinés par Knuth et par l'AMS (polices MSAM et MSBM). Il a simplement fallu adapter l'épaisseur des traits et la hauteur de l'axe mathématique (cf. aussi figure 3) :

	<i>SMF Baskerville</i>	CM	<i>MathTime</i>	<i>Lucida</i>
Trait délié	23	22	21	28
Trait épais	68	66	72	95,5
Rapport délié/épais	0,3382	0,3333	0,2917	0,2932
Trait de symb. géom.	48	40	50	48
Hauteur d'axe math.	212	250	250	290

On voit donc que le *SMF Baskerville* a de loin l'axe mathématique le plus bas (et *Lucida* l'axe le plus haut). L'épaisseur de trait de symboles géométriques est quasi la même pour le *SMF Baskerville*, *MathTime* et *Lucida*, alors que pour Computer Modern elle est sensiblement plus petite.

4. Comparaison de la typographie des PUF et de $\text{\TeX}/\text{\textit{SMF Baskerville}}$

Dans la figure 4, page 13, on voit la reproduction d'un extrait de page des *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* ([4]), et immédiatement au dessous, figure 5, le même texte composé en *SMF Baskerville*. Pour obtenir une typographie proche de l'original, on a utilisé les options `leqno` (numéros de formule à gauche) et `fleqn` (formules mathématiques en vedette composées fer à gauche) d' \LaTeX , un `\parindent` d'un centimètre, et un `\@rightmargin` (le retrait des formules mathématiques) de 2,7 centimètres.

Comparons les figures 4 et 5. Plusieurs choses sautent immédiatement aux yeux :

1. l'espacement des symboles mathématiques n'est pas le même, ce qui fait que les formules en vedette sont beaucoup plus larges que dans l'original. Au fait, les deux typographies adoptent des approches anti-diamétralement opposées : regardons de plus près les valeurs limites du produit $\prod_{i=0}^{n-1}$, dans la dernière équation en vedette. Le lecteur s'apercevra que \TeX ne met aucun espace entre i , $=$ et 0 , alors que les PUF espacent généreusement. Inversement, \TeX mettra beaucoup plus d'espace des deux côtés des signes « égal », en taille normale : il suffit de comparer l'espacement de la première ligne de la formule (8.5). Knuth, dans le \TeX book (p. 170), mentionne ce phénomène :

Here 0, 1, 2, and 3 stand for no space, thin space, medium space and thick space, respectively; the table entry is parenthesized if the space is to be inserted only in display and text styles, not in script or subscript styles.

et effectivement, l'espacement de $i = 0$, c'est-à-dire Ord-Rel-Ord, est entre parenthèses : (3) (3). Mais Knuth ne nous dit pas le pourquoi

If a function ρ belongs to $L^1(\mu_K)$ then for the conditional expectation of ρ with respect to the inverse image of the whole σ -field under f^k , we have the formula:

$$E_{\mu_K}(\rho | f^{-k}(\mathcal{B}))(x) = \sum_{y \in f^{-k}(f^k(x))} \frac{\rho(y)}{\psi(y)}.$$

Hence:

$$(8.5) \quad \int \left(\frac{\psi}{\varphi} - 1 \right) d\mu_K = \int E_{\mu_K} \left(\frac{\psi}{\varphi} - 1 | f^{-k}(\mathcal{B}) \right) d\mu_K \\ = \int \sum_{y \in f^{-k}(f^k(x))} \left(\frac{1}{\varphi(y)} - \frac{1}{\psi(y)} \right) d\mu_K(x) = \int (1 - 1) d\mu_K = 0.$$

Assume now that μ_K is a measure with maximal entropy for $f^k|_K$, and that $x \in K \setminus B$, $f^{kn}(x) = x$. By (8.4) and (8.5), we have $\varphi = \psi$ μ_K -almost everywhere. The whole trajectory of x (under f^k) is disjoint from B and hence, in view of (8.1), (8.2) and Theorem (6.2) (c), φ and ψ are continuous in some neighbourhood of the trajectory of x . Thus, they are equal on the whole trajectory of x . Therefore by (8.1) and (8.2) we obtain:

$$|(f^{nk})'(x)| = \prod_{i=0}^{n-1} |(f^k)'(f^{ik}(x))| = \prod_{i=0}^{n-1} \psi(f^{ik}(x)) = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi(f^{ik}(x)) = \beta^n.$$

FIG. 4: Extrait des *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* [4]

If a function ρ belongs to $L^1(\mu_K)$ then for the conditional expectation of ρ with respect to the inverse image of the whole σ -field under f^k , we have the formula:

$$E_{\mu_K}(\rho | f^{-k}(\mathcal{B}))(x) = \sum_{y \in f^{-k}(f^k(x))} \frac{\rho(y)}{\psi(y)}.$$

Hence:

$$(8.5) \quad \int \left(\frac{\psi}{\varphi} - 1 \right) d\mu_K = \int E_{\mu_K} \left(\frac{\psi}{\varphi} - 1 | f^{-k}(\mathcal{B}) \right) d\mu_K \\ = \int \sum_{y \in f^{-k}(f^k(x))} \left(\frac{1}{\varphi(y)} - \frac{1}{\psi(y)} \right) d\mu_K(x) = \int (1 - 1) d\mu_K = 0.$$

Assume now that μ_K is a measure with maximal entropy for $f^k|_K$, and that $x \in K \setminus B$, $f^{kn}(x) = x$. By (8.4) and (8.5), we have $\varphi = \psi$, μ_K -almost anywhere. The whole trajectory of x (under f^k) is disjoint from B and hence, in view of (8.1), (8.2) and Theorem (6.2) (c), φ and ψ are contiguous in some neighbourhood of the trajectory of x . Thus, there are equal on the whole trajectory of x . Therefore by (8.1) and (8.2) we obtain:

$$|(f^{nk})'(x)| = \prod_{i=0}^{n-1} |(f^k)'(f^{ik}(x))| = \prod_{i=0}^{n-1} \psi(f^{ik}(x)) = \prod_{i=0}^{n-1} \varphi(f^{ik}(x)) = \beta^n.$$

FIG. 5: Le même texte, composé en *SMF Baskerville*

de cette distinction entre taille normale et indices/exposants. On ne peut que conjecturer que Knuth le fait pour gagner de la place et avoir des grands opérateurs plus compacts. De l'autre côté, les PUF améliorent ainsi la lisibilité des formules en petits caractères (pourtant Knuth adopte cette même méthode d'espacement plus élevé en petits corps, pour le texte).

Quelle est la meilleure approche? Difficile de le dire. Il devrait être possible d'émuler la typographie des PUF en modifiant convenablement les paramètres de la police (*cf.* Appendice G du \TeX book), cette décision appartient à la SMF; néanmoins, nous avons déjà agi dans ce sens, en espaçant les lettres/symboles mathématiques, en petit corps : il ne s'agit pas d'un espacement spécial entre symboles mathématiques, mais d'un espacement global, entre lettres latines et/ou grecques;

2. les grands opérateurs Σ et Π sont plus petits dans la version des PUF. On a préféré des symboles plus grands, pour éviter une confusion avec les lettres grecques Σ et Π ;
3. le chiffre 1 a un empattement bilatéral pour les PUF, et unilatéral pour le *SMF Baskerville*. Nous avons pensé que le 1 à empattement bilatéral ressemble trop à une petite capitale 1 (lettre I). Ceci dit, le ITC New Baskerville adopte un dessin différent pour le 1 droit et italique, ainsi que pour les autres chiffres :

o	1	2	3	4	5	6	7	8	9
o	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>
o	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>o</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>

Pour d'autres différences (plus légères) entre PUF et le *SMF Baskerville*, voir § 5.

5. Question ouverte

En examinant de plus près la typographie des PUF on s'aperçoit très rapidement que pour les lettres latines, le caractère utilisé en taille normale n'est pas le même que celui des indices/exposants. Le lecteur peut s'en apercevoir aisément en comparant, dans la figure 4, dans la première équation en vedette, le y de la fraction $\frac{\rho(y)}{\psi(y)}$ avec celui de l'« indice » de la somme $\sum_{y \in \dots}$. En petit corps, au lieu de Baskerville, un caractère proche du Didot est utilisé. Est-ce par souci de lisibilité? Ou simplement à cause de contraintes techniques? [Dans le jargon de \TeX : est-ce une bogue, ou une fonctionnalité?]

La question reste ouverte, et dans le doute nous avons décidé de ne pas adopter cette méthode. Il va de soi que, le cas échéant, elle peut être implementée facilement.

Bibliographie

- [1] <http://www2.linotypelibrary.com/fonts/htm/370DEC09/SEA/5&3&3&24256/F-Sample.html?weight=33.6>
- [2] http://www.paratype.com/library/newstyles.asp?fontcode=PT_NWB
- [3] Lawson, A. *Anatomy of a Typeface*, David R. Godine, Boston, 1990.
- [4] Misiurewicz, M. "Structure of Mappings of an Interval with Zero Entropy," *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, vol. 53, 1981, p. 46.
- [5] Steinberg, S. H. *Five Hundred Years of Printing*, The British Library & Oak Knoll Press, Londres, 1996.

A. Quelques pages composées en *SMF Baskerville*

Dans cet article nous avons beaucoup parlé du *SMF Baskerville* mais n'en avons montré que quelques maigres exemples. Dans la suite, et jusqu'à la fin de cet article, nous proposons au lecteur des formules et du texte mathématique, tirés pêle-mêle du fichier `testmath.tex` de l'AMS. Ces exemples manquent manifestement de cohérence mathématique, mais proposent néanmoins un bel échantillon des différents aspects de la composition mathématique.

$$\mathbf{K}(t, t_1, \dots, t_n) = \begin{pmatrix} D_1 t & -a_{12} t_2 & \dots & -a_{1n} t_n \\ -a_{21} t_1 & D_2 t & \dots & -a_{2n} t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} t_1 & -a_{n2} t_2 & \dots & D_n t \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$D_i = \sum_{j \in \mathbf{n}} a_{ij} t_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

$$D(t_1, \dots, t_n) = \frac{\delta}{\delta t} \det \mathbf{K}(t, t_1, \dots, t_n) \Big|_{t=1}.$$

$$\mathbf{D}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i \in \mathbf{n}} \mathbf{D}_i \det \mathbf{K}(t = \mathbf{1}, t_1, \dots, t_n; i|i), \quad (3)$$

$$\det \mathbf{K}(t_1, t_1, \dots, t_n) = \sum_{\mathbf{I} \in \mathbf{n}} (-1)^{|\mathbf{I}|} t^{n-|\mathbf{I}|} \prod_{i \in \mathbf{I}} t_i \prod_{j \in \mathbf{I}} (\mathbf{D}_j + \lambda_j t_j) \det \mathbf{A}^{(\lambda, t)}(\bar{\mathbf{I}}|\bar{\mathbf{I}}). \quad (4)$$

$$\det \mathbf{K}(t = \mathbf{1}, t_1, \dots, t_n) = \sum_{\mathbf{I} \in \mathbf{n}} (-1)^{|\mathbf{I}|} \prod_{i \in \mathbf{I}} t_i \prod_{j \in \mathbf{I}} (\mathbf{D}_j + \lambda_j t_j) \det \mathbf{A}^{(\lambda)}(\bar{\mathbf{I}}|\bar{\mathbf{I}}) = 0. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i \in \mathbf{n}} a_i x_i \right) \det \mathbf{K}(t = \mathbf{1}, x_1, \dots, x_n; l|l) \\ &= \left(\prod_{i \in \mathbf{n}} \hat{x}_i \right) \sum_{\mathbf{I} \subseteq \mathbf{n} - \{l\}} (-1)^{|\mathbf{I}|} \text{per } \mathbf{A}^{(\lambda)}(\mathbf{I}|\mathbf{I}) \det \mathbf{A}^{(\lambda)}(\bar{\mathbf{I}} \cup \{l\} | \bar{\mathbf{I}} \cup \{l\}). \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_c = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n (-1)^l \mathbf{D}_l, \quad (7)$$

$$\mathbf{D}_l = \sum_{\mathbf{l} \subseteq \mathbf{n}} \mathbf{D}(t_1, \dots, t_n) \mathbf{2} \Big|_{t_i = \begin{cases} 0, & \text{if } i \in \mathbf{l} \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}}, \quad i=1, \dots, n. \quad (8)$$

$$\mathbf{T} = n^{p-2} \prod_{i=1}^p (n - n_i)^{n_i-1} \quad (9)$$

$$n = n_1 + \dots + n_p. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c &= \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^n (-1)^l (n-l)^{p-2} \sum_{l_1 + \dots + l_p = l} \prod_{i=1}^p \binom{n_i}{l_i} \\ &\quad \cdot [(n-l) - (n_i - l_i)]^{n_i - l_i} \cdot \left[(n-l)^2 - \sum_{j=1}^p (n_i - l_i)^2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l (n-l)^{p-2} \sum_{l_1+\dots+l_p=l} \prod_{i=1}^p \binom{n_i}{l_i} \\ &\cdot [(n-l) - (n_i - l_i)]^{n_i - l_i} \left(1 - \frac{lp}{n_p}\right) [(n-l) - (n_p - l_p)]. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_c &= \frac{n_1! n_2! n_3!}{n_1 + n_2 + n_3} \sum_i \left[\binom{n_1}{i} \binom{n_2}{n_3 - n_1 + i} \binom{n_3}{n_3 - n_2 + i} \right. \\ &\quad \left. + \binom{n_1 - 1}{i} \binom{n_2 - 1}{n_3 - n_1 + i} \binom{n_3 - 1}{n_3 - n_2 + i} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'' &= \sum_{\mathbf{H} \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{B}|} t^{\dim \Gamma(\mathcal{B})} \\ &= \sum_{\mathbf{Y} \in \mathbf{L}''} \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}, \mathbf{Y})} (-1)^{|\mathcal{B}|} t^{\dim \mathbf{Y}} \\ &= - \sum_{\mathbf{Y} \in \mathbf{L}''} \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathbf{H}, \mathbf{Y})} (-1)^{|\mathcal{B} - \mathcal{A}_{\mathbf{H}}|} t^{\dim \mathbf{Y}} \\ &= - \sum_{\mathbf{Y} \in \mathbf{L}''} \mu(\mathbf{H}, \mathbf{Y}) t^{\dim \mathbf{Y}} \\ &= -\chi(\mathcal{A}'', t). \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{D}}v}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(t) = \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{\mathbf{D}v([t, s])}{|\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])}, \quad \frac{\tilde{\mathbf{D}}u}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(t) = \lim_{s \rightarrow t^+} \frac{\mathbf{D}u([t, s])}{|\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])}$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{v}(s) - \hat{v}(t)}{|\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])} &= \frac{f(\hat{u}(s)) - f(\hat{u}(t))}{|\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])} \\ &= \frac{f(\hat{u}(s)) - f(\hat{u}(t) + \frac{\tilde{\mathbf{D}}u}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(t) |\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s]))}{|\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])} \\ &\quad + \frac{f(\hat{u}(t) + \frac{\tilde{\mathbf{D}}u}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(t) |\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])) - f(\hat{u}(t))}{|\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\hat{v}(s) - \hat{v}(t)}{|\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])} - \frac{f(\hat{u}(t) + \frac{\tilde{\mathbf{D}}u}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(t) |\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])) - f(\hat{u}(t))}{|\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])} \right| \leq \mathbf{K} \left| \frac{\hat{u}(s) - \hat{u}(t)}{|\tilde{\mathbf{D}}u|([t, s])} - \frac{\tilde{\mathbf{D}}u}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(t) \right|.$$

$$\frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}(y + t\nu) = \frac{\tilde{\mathbf{D}}u_y}{|\tilde{\mathbf{D}}u_y|}(t) \quad |\tilde{\mathbf{D}}u_y| \text{-a.e. in } \mathbb{R} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\pi_\nu} \frac{\tilde{\mathbf{D}}u_y}{|\tilde{\mathbf{D}}u_y|} \cdot |\tilde{\mathbf{D}}u_y| d\mathcal{H}_{n-1}(y) &= \int_{\pi_\nu} \tilde{\mathbf{D}}u_y d\mathcal{H}_{n-1}(y) \\ &= \langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle = \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|} \cdot |\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle| = \int_{\pi_\nu} \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}(y + \cdot \nu) \cdot |\tilde{\mathbf{D}}u_y| d\mathcal{H}_{n-1}(y) \end{aligned}$$

$$\frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}v, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}(y + t\nu) = \frac{\tilde{\mathbf{D}}v_y}{|\tilde{\mathbf{D}}v_y|}(t) \quad |\tilde{\mathbf{D}}v_y| \text{-a.e. in } \mathbb{R} \quad (16)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{u}(y + t\nu) + h \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}(y + t\nu)) - f(\tilde{u}(y + t\nu))}{h} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}v, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}(y + t\nu)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{u}(x) + h \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}(x)) - f(\tilde{u}(x))}{h} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}v, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{u}(x) + h \frac{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(x) \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}(x)) - f(\tilde{u}(x))}{h} = \frac{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(x) \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}v, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}(x)$$

$$\frac{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}{|\tilde{\mathbf{D}}u|} \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle}{|\tilde{\mathbf{D}}u|} = \left\langle \frac{\tilde{\mathbf{D}}u}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}, \nu \right\rangle \quad |\tilde{\mathbf{D}}u| \text{-a.e. in } \mathbb{R}^n$$

$$\frac{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|}{|\tilde{\mathbf{D}}u|} \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}v, \nu \rangle}{|\langle \tilde{\mathbf{D}}u, \nu \rangle|} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{D}}v, \nu \rangle}{|\tilde{\mathbf{D}}u|} = \left\langle \frac{\tilde{\mathbf{D}}v}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}, \nu \right\rangle \quad |\tilde{\mathbf{D}}u| \text{-a.e. in } \mathbb{R}^n$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\tilde{u}(x) + h \left\langle \frac{\tilde{\mathbf{D}}u}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(x), \nu \right\rangle\right) - f(\tilde{u}(x))}{h} = \left\langle \frac{\tilde{\mathbf{D}}v}{|\tilde{\mathbf{D}}u|}(x), \nu \right\rangle,$$

$$\mathbf{D}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{n}} (-1)^{|\mathbf{l}|-1} |\mathbf{l}| \prod_{i \in \mathbf{l}} t_i \prod_{j \in \mathbf{l}} (\mathbf{D}_j + \lambda_j t_j) \det \mathbf{A}^{(\lambda)}(\bar{\mathbf{l}}|\bar{\mathbf{l}}). \quad (17)$$

$$\mathbf{D}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = \prod_{i \in \mathbf{n}} \hat{x}_i \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{n}} (-1)^{|\mathbf{l}|-1} |\mathbf{l}| \text{per } \mathbf{A}^{(\lambda)}(\mathbf{l}|\mathbf{l}) \det \mathbf{A}^{(\lambda)}(\bar{\mathbf{l}}|\bar{\mathbf{l}}). \quad (18)$$

$$\mathbf{W}(\Phi) = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\varphi}{(\varphi_1, \varepsilon_1)} & \circ & \dots & \circ \\ \frac{\varphi k_{n2}}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} & \frac{\varphi}{(\varphi_2, \varepsilon_2)} & \dots & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi k_{n1}}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} & \frac{\varphi k_{n2}}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} & \dots & \frac{\varphi k_{n, n-1}}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} \quad \frac{\varphi}{(\varphi_n, \varepsilon_n)} \end{array} \right\|$$

$$\begin{aligned}
f_{h,\varepsilon}(x, y) &= \varepsilon \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{t_\varepsilon} \mathbf{L}_{x,y_\varepsilon(\varepsilon u)} \varphi(x) du \\
&= h \int \mathbf{L}_{x,z} \varphi(x) \rho_x(dz) \\
&\quad + h \left[\frac{1}{t_\varepsilon} \left(\mathbf{E}_y \int_0^{t_\varepsilon} \mathbf{L}_{x,y^x(s)} \varphi(x) ds - t_\varepsilon \int \mathbf{L}_{x,z} \varphi(x) \rho_x(dz) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{t_\varepsilon} \left(\mathbf{E}_y \int_0^{t_\varepsilon} \mathbf{L}_{x,y^x(s)} \varphi(x) ds - \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{t_\varepsilon} \mathbf{L}_{x,y_\varepsilon(\varepsilon s)} \varphi(x) ds \right) \right] \\
&= h \widehat{\mathbf{L}}_x \varphi(x) + h \theta_\varepsilon(x, y),
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{I}_2| &= \left| \int_0^T \psi(t) \left\{ u(a, t) - \int_{\gamma(t)}^a \frac{d\theta}{k(\theta, t)} \int_a^\theta c(\xi) u_t(\xi, t) d\xi \right\} dt \right| \\
&\leq C_6 \left\| f \int_\Omega |\widetilde{\mathbf{S}}_{a,-}^{-1,0} \mathbf{W}_2(\Omega, \Gamma_l)| \left\| |u| \overset{\circ}{\rightarrow} \mathbf{W}_2^{\widetilde{\mathbf{A}}}(\Omega; \Gamma_r, \mathbf{T}) \right\| \right|.
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{I}_1| &= \left| \int_\Omega g \mathbf{R} u d\Omega \right| \\
&\leq C_3 \left[\int_\Omega \left(\int_a^x g(\xi, t) d\xi \right)^2 d\Omega \right]^{1/2} \\
&\quad \times \left[\int_\Omega \left\{ u_x^2 + \frac{1}{k} \left(\int_a^x c u_t d\xi \right)^2 \right\} c \Omega \right]^{1/2} \\
&\leq C_4 \left\| f \int_\Omega |\widetilde{\mathbf{S}}_{a,-}^{-1,0} \mathbf{W}_2(\Omega, \Gamma_l)| \left\| |u| \overset{\circ}{\rightarrow} \mathbf{W}_2^{\widetilde{\mathbf{A}}}(\Omega; \Gamma_r, \mathbf{T}) \right\| \right|.
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{I}_2| &= \left| \int_0^T \psi(t) \left\{ u(a, t) - \int_{\gamma(t)}^a \frac{d\theta}{k(\theta, t)} \int_a^\theta c(\xi) u_t(\xi, t) d\xi \right\} dt \right| \\
&\leq C_6 \left\| f \int_\Omega |\widetilde{\mathbf{S}}_{a,-}^{-1,0} \mathbf{W}_2(\Omega, \Gamma_l)| \left\| |u| \overset{\circ}{\rightarrow} \mathbf{W}_2^{\widetilde{\mathbf{A}}}(\Omega; \Gamma_r, \mathbf{T}) \right\| \right|.
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left\{ \int_a^b [f(x)^2 g(y)^2 + f(y)^2 g(x)^2] - 2f(x)g(x)f(y)g(y) dx \right\} dy \\
&= \int_a^b \left\{ g(y)^2 \int_a^b f^2 + f(y)^2 \int_a^b g^2 - 2f(y)g(y) \int_a^b fg \right\} dy
\end{aligned} \tag{23}$$